

WYBRANE ZAGADNIENIA DYFRAKCJI FRESNELA

prof. dr hab. inż. Krzysztof Patorski

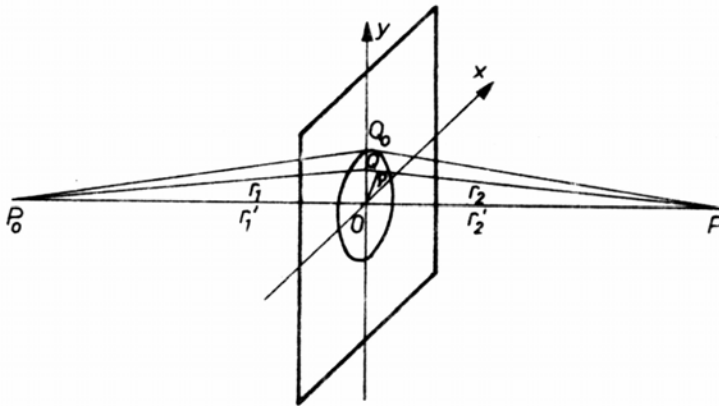
Omawiane zagadnienia z zakresu dyfrakcji Fresnela obejmują: dyfrakcję na obiektach o symetrii obrotowej ze szczególnym uwzględnieniem tzw. konstrukcji połówkowych stref Fresnela (znajdującej zastosowanie w dyfrakcyjnych układach obrazujących), pole Fresnela szczeliny i krawędzi oraz spektakularne zjawisko samoobrazowania i jego wybrane zastosowania w interferometrii i wizualizacji okresowych modulacji fazowych.

1. Dyfrakcja Fresnela na obiektach o symetrii kołowej

Pole dyfrakcyjne Fresnela otworu kołowego

Rozpatrzmy otwór kołowy o promieniu $OQ_0 = a_0$ oświetlony falą sferyczną emitowaną przez punktowe źródło światła P_0 znajdujące się na osi optycznej, która pokrywa się z normalną do ekranu i przechodzi przez środek otworu, rys. 1.

Punkt obserwacji P leży również na osi optycznej. Wprowadzając współrzędne dowolnego punktu Q należącego do otworu w układzie biegunowym jako (ρ, φ) , gdzie $\rho = OQ$ i φ jest kątem między OQ a osią x , rozkład pola w punkcie P wyznaczony ze wzoru Fresnela-Kirchhoffa ma postać



Rys. 1 Geometria dyfrakcji Fresnela na otworze kołowym.

$$E(P) = \frac{A}{i\lambda} \int_0^{a_0} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r_1 r_2} \exp[ik(r_1 + r_2)] \rho d\rho d\varphi, \quad (1)$$

gdzie A oznacza amplitudę zaburzenia na fali sferycznej, $k = 2\pi/\lambda$. Z powodu małych wymiarów otworu pominięto stały współczynnik kierunkowy. Po uwzględnieniu zależności geometrycznych wynikających z obrotowej symetrii układu wzór (1) przyjmuje postać

$$E(P) = \frac{2\pi A}{i\lambda} \int \frac{\exp[ik(r_1 + r_2)]}{r_1 + r_2} d(r_1 + r_2) \approx \frac{2\pi A}{i\lambda(r_1' + r_2')} \int_{l_0}^{l_1} \exp(ikl) dl, \quad (2)$$

gdzie $l = r_1 + r_2$, l_0 i l_1 oznaczają odpowiednio minimalną i maksymalną wartość parametru l

$$I_0 = r_1' + r_2', \quad (3) \quad I_1 = P_0 Q_0 + Q_0 P = I_0 + p \left(\frac{\lambda}{2} \right), \quad (4)$$

gdzie

$$p \left(\frac{\lambda}{2} \right) = (P_0 Q_0 + Q_0 P) - (P_0 O + OP) = \sqrt{r_1'^2 + a_0^2} + \sqrt{r_2'^2 + a_0^2} - (r_1' + r_2') \quad (5)$$

oznacza różnicę dróg optycznych wyrażoną w połówkach długości fali promieniowania λ . Wygoda takiego oznaczenia zostanie wyjaśniona niżej. Z całki Fresnela-Kirchhoffa otrzymujemy

$$E(P) \approx E_0(P) [1 - \exp(-ip\pi)], \quad (6) \quad \text{gdzie} \quad E_0(P) = A \frac{\exp[ik(r_1' + r_2')]}{r_1' + r_2'}$$

oznacza wartość pola w punkcie P w przypadku swobodnej propagacji fali sferycznej bez przesłony. Intensywność wynosi

$$I(P) = 4I_0 \sin^2 \left(\frac{p\pi}{2} \right), \quad (7)$$

gdzie $I_0 = |E_0(P)|^2$. Z ostatniego wzoru wynika, że intensywność $I(P)$ równa jest zero lub wartości maksymalnej, odpowiednio, dla p równego całkowitej liczbie parzystej lub nieparzystej. Różnica dróg optycznych $(P_0 Q_0 + Q_0 P) - (P_0 O + OP)$ jest wtedy równa parzystej lub nieparzystej wielokrotności $(\lambda/2)$. Warto zauważyć, że wartość maksymalna intensywności jest czterokrotnie większa od wartości intensywności w przypadku braku otwarka kołowego (swobodnej propagacji fali sferycznej na odległości $r_1' + r_2'$).

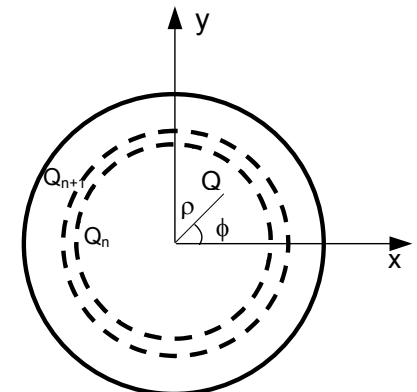
Wyżej opisane zjawisko interpretuje się za pomocą tzw. połówkowych stref Fresnela, rys. 2.

Otwór kołowy dzieli się na pierścieniowe strefy, promień ρ_n n-tego pierścienia spełnia równość

$$(P_0 Q_n + Q_n P) - (P_0 O + OP) = n(\lambda/2) \quad (8)$$

Promień ρ_n można wyznaczyć w przybliżonej postaci

$$\rho_n = \sqrt{\frac{n\lambda r_1' r_2'}{r_1' + r_2'}} = \rho_1 \sqrt{n}. \quad (9)$$



Rys. 2 Konstrukcja połówkowych stref Fresnela.

Przy wyprowadzaniu ostatniego wzoru posłużono się przybliżeniem Fresnela polegającym na uwzględnieniu tylko dwóch pierwszych wyrazów rozwinięcia Taylora:

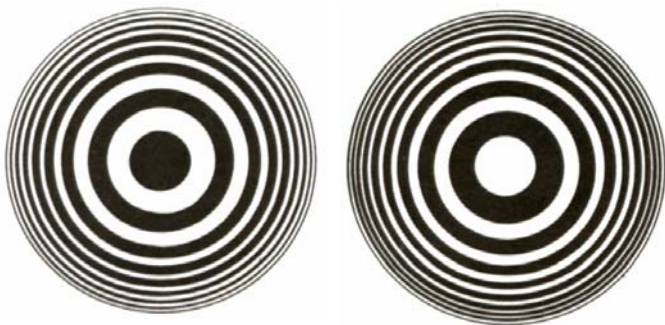
$$P_0Q_n = (r_1'^2 + \rho_n^2)^{1/2} = r_1' + \rho_n^2/2r_1'; \quad Q_nP = (r_2'^2 + \rho_n^2)^{1/2} = r_2' + \rho_n^2/2r_2'.$$

Pola w punkcie P pochodzące od n-tej i (n-1)-ej strefy są w przeciwfazie. Tak więc w przypadku otworu kołowego zawierającego parzystą liczbę stref Fresnela intensywność w punkcie P osiąga wartość pomijalnie małą, a w przypadku nieparzystej liczby stref – wartość maksymalną.

Wprowadzając tzw. liczbę Fresnela $N = (a_0/\lambda) (a_0/r_2') = (d^2/4\lambda) (1/r_2')$, gdzie $d = 2a_0$, łatwo zauważyć że jest ona równa liczbie stref Fresnela, które można wykreślić w otworze z punktu P znajdującego się w odległości r_2' od otworu. Dla obszaru dyfrakcji Fresnela mamy $r_2' \ll d^2/\lambda$ i liczba Fresnela N jest duża.

Płytki strefowa Fresnela

Jeśli w otworze kołowym z wyznaczonymi połówkowymi strefami Fresnela według zależności (8) lub (9) wykonamy co drugą strefę z materiału nieprzeźroczystego, to otrzymamy tzw. płytkę strefową Fresnela. Pokazuje ją rys. 3.



Rys. 3 Komplementarne płytki strefowe Fresnela.

Intensywność w punkcie P, rys. 1, w przypadku zastąpienia otworu kołowego płytką Fresnela będzie znacznie większa od $I_{\max}(P) = 4I_0$, patrz wzór (7). Wynika to z faktu współfazowości pól w punkcie P pochodzących od wszystkich przeźroczystych pierścieni. Płytkę strefową Fresnela charakteryzuje efekt odwzorowania, tzn. punkt P jest obrazem punktu P_0 . Można to łatwo wykazać rozważając wzór soczewkowy

$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{r_1'} + \frac{1}{r_2'}, \quad (10)$$

$$\text{lub jego przekształconą postać} \quad f = \frac{r_1' r_2'}{r_1' - r_2'}, \quad (11)$$

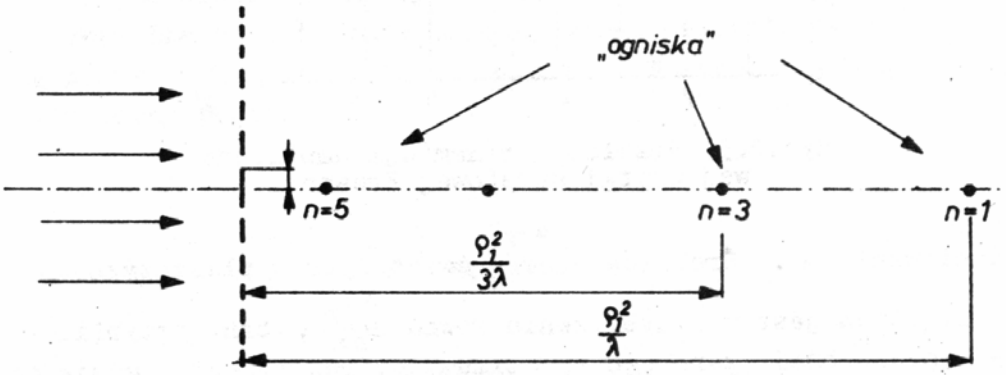
gdzie r_1' i r_2' oznaczają odległość przedmiotu i obrazu od soczewki. Podstawiając (11) do przybliżonego wzoru (9) otrzymujemy

$$\rho_n^2 = n\lambda f,$$

skąd

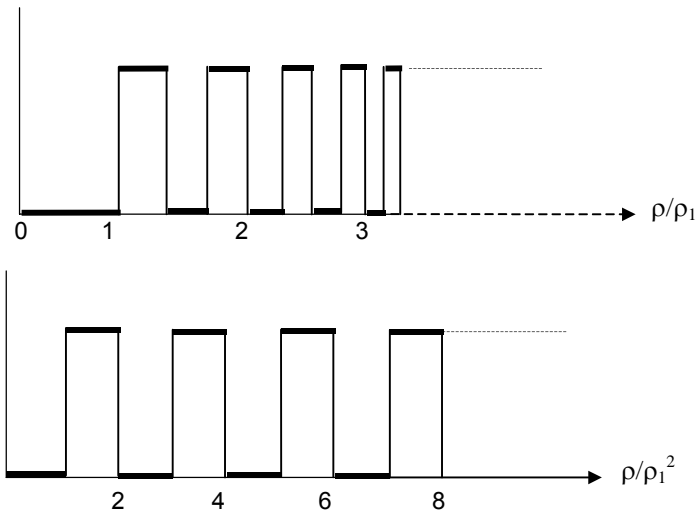
$$f = \rho_n^2 / n\lambda = \rho_1^2 / \lambda. \quad (12)$$

Ogniskową f' płytki Fresnela definiuje się jako odległość r_2' punktu zogniskowania promieniowania przy oświetleniu płytki falą płaską, $r_1' = \infty$. Jednocześnie obserwuje się wzdłuż osi optycznej nie jedno jak w przypadku konwencjonalnej soczewki, lecz wiele ognisk w odległościach $f_n' = f'/n$ od płytki, gdzie $n = 1, 3, 5, 7, \dots$, rys. 4. Dla tych odległości każda strefa Fresnela obejmuje 1, 3, 5, ... stref Fresnela.



Rys. 4 Położenie ognisk płytki strefowej Fresnela.

Brak wtórnych ognisk dla $n = 2, 4, 6, \dots$ można również wyjaśnić przedstawiając transmitancję płytki Fresnela jako funkcję promienia ρ , unormowanego przez kwadrat promienia ρ_1 pierwszego pierścienia, patrz rys. 5.



Rys. 5 Rozkład transmitancji amplitudowej płytki strefowej Fresnela.

Jest to funkcja prostokątna, którą możemy zapisać w postaci szeregu Fouriera

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \exp\left\{in2\pi \left[\frac{x^2}{\rho_1^2} \right]\right\}. \quad (13)$$

Współczynnik wypełnienia q definiowany jako stosunek szerokości pojedynczego obszaru (szczeliny) o transmitancji 1 do okresu wynosi 0.5, a więc

$$A_n = \frac{\sin(n\pi q)}{n\pi}. \quad (14)$$

Współczynnik A_n dla n parzystego równy jest zeru.

Ze wzoru (12) wynika, że wartość ogniskowej płytki strefowej Fresnela jest funkcją długości fali λ . Średnica plamek świetlnych w płaszczyznach występowania ognisk jest w przybliżeniu równa $\lambda f_n' / \Delta x$, tzn. przybliżonej szerokości zerowego maksimum dyfrakcyjnego, gdzie Δx oznacza średnicę płytki Fresnela. Z uwagi na zależność $\Delta x/2 = \sqrt{N\rho_1}$ średnicę plamek ogniskowych można wyrazić w funkcji liczby stref N jako $\Delta x/4Nn$.

Fresnelowskie pole dyfrakcyjne krążka

Rozwiązanie całki opisanej wzorem (1) przy założeniu obszaru całkowania spełniającego zależność $OQ_0 < \rho < \infty$ daje zaskakujący rezultat. Dla każdego punktu obserwacji P leżącego w dowolnej odległości od płytki Fresnela na osi optycznej obserwuje się jasny punkt, tzw. punkt Poissona. Efekt ten, niewytłumaczalny na gruncie optyki geometrycznej, stanowi jeden z najbardziej spektakularnych dowodów falowej natury światła. Można go łatwo interpretować wykorzystując konstrukcję Huygensa-Fresnela połówkowych stref Fresnela. Część czoła falowego nie zatrzymaną przez krążek (patrz rys. 1, $OQ_0 < \rho < \infty$) można podzielić na strefy połówkowe zaczynając od krawędzi krążka. Pole generowane przez sąsiadujące ze sobą strefy będą przeciwne znaku w punkcie P , ich amplituda będzie malała ze wzrostem numeru strefy. Pola będą się więc wzajemnie kompensowały i amplituda wypadkowa w punkcie P będzie równa połowie amplitudy zaburzenia pochodzącego od pierwszej strefy (jak w przypadku braku przedmiotu dyfrakcyjnego). W przypadku krążka o dużej średnicy szerokość pierwszej strefy jest bardzo mała i odchyłki kształtu krążka od kształtu idealnie kołowego mogą spowodować całkowity zanik efektu. Ponadto, stosując krążki idealnie kołowe w punkcie P można uzyskać obraz małego przedmiotu umieszczonego w punkcie P_0 .

Poprawność podanego wyżej heurystycznego wytłumaczenia wynika z faktu, że całkę Fresnela-Kirchhoffa można łatwo interpretować korzystając z modelu stref połówkowych – po raz pierwszy zauważył to Fresnel. Jest znacznie prostsze podejście niż poszukiwanie i interpretacja analitycznego rozwiązania całki (1).

Dyfrakcja Fresnela wiązki gaussowskiej

Niech rozkład amplitudy zespolonej $U(x_1, y_1)$ w otworze ekranu będzie dany funkcją gaussowską

$$U(x_1, y_1) = \exp\left[-\frac{x_1^2 + y_1^2}{w_0^2}\right], \quad (15)$$

jest to przypadek tzw. nieobciętej wiązki gaussowskiej. Dokładne rozwiązanie wzoru dyfrakcyjnego w przybliżeniu Fresnela (patrz wzór (7) w poprzedniej części wykładu dotyczącej podstaw dyfrakcji), można znaleźć obliczając splot funkcji $\exp[-(x_1^2 + y_1^2)/w_0^2]$ z funkcją odpowiedzi impulsowej propagacji w wolnej przestrzeni. Można wykazać, że w rozważanym przypadku rozkład intensywności w polu Fresnela dany jest wzorem

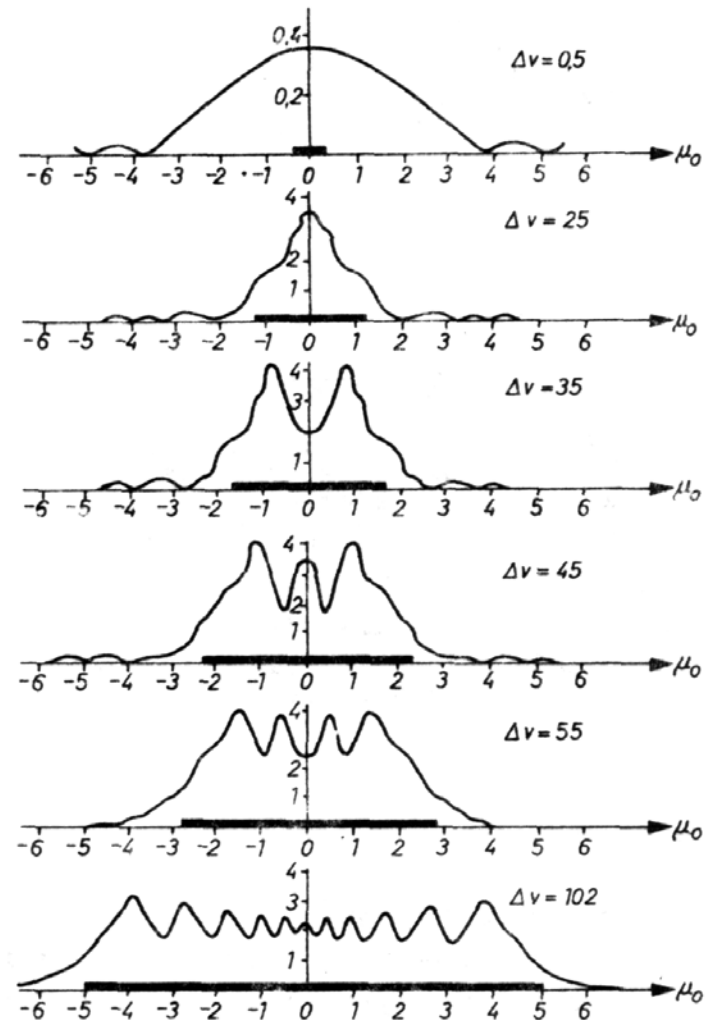
$$I(x_2, y_2) \propto \left[\frac{w_0}{w_z} \right]^2 \exp \left[-2 \frac{x_2^2 + y_2^2}{w_z^2} \right], \quad (16)$$

gdzie $w_z^2 = w^2 + \theta_0^2 z^2$; $\theta_0 = \lambda/\pi w_0$. Wzór (16) opisuje gaussowski rozkład intensywności o szerokości połówkowej w_z (odpowiadającej spadkowi intensywności względem intensywności maksymalnej o $1/e^2$).

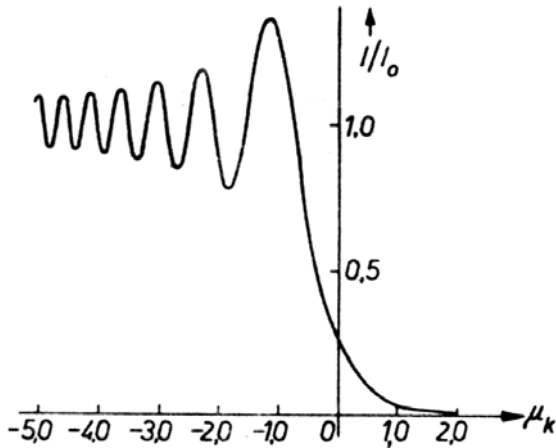
2. Pole dyfrakcyjne Fresnela przedmiotów o krawędziach liniowych

Najczęściej rozpatrywanymi tego typu przedmiotami są krawędź i szczelina. Analiza pól dyfrakcyjnych tych przedmiotów wykorzystuje również podejście z podziałem czoła falowego na strefy połówkowe. Rezultatem jest model obliczeniowy tzw. spirali Cornu (poza zakresem niniejszego wykładu).

Na rys. 6 i 7 pokazano krzywe teoretyczne rozkładu intensywności dyfrakcyjnych obrazów Fresnela szczeliny o zmiennej szerokości i prostoliniowej krawędzi.



Rys. 6 Krzywe rozkładu intensywności w polu dyfrakcyjnym Fresnela szczeliny o szerokości a dla różnych wartości parametru $\Delta v = 2a[2(r_1' + r_2')/(\lambda r_1' r_2')]^{1/2}$. Grube linie oznaczają obszar cienia geometrycznego: $\mu_0 = x_0[2(r_1' + r_2')/(\lambda r_1' r_2')]^{1/2}$, gdzie x_0 oznacza współrzędną środka szczeliny.



Rys. 7 Rozkład intensywności fresnelowskiego pola dyfrakcyjnego krawędzi w kierunku do niej prostopadłym; $\mu_k = x_k[2(r_1' + r_2')/(\lambda r_1' r_2')]^{1/2}$, gdzie x_k oznacza współrzędną krawędzi, $\mu_k = 0$ odpowiada położeniu krawędzi geometrycznego cienia.

Zasada Babineta

Dwa ekrany (przedmioty dyfrakcyjne) nazywa się wzajemnie komplementarnymi jeśli elementy przezroczyste dla światła w jednym ekranie dokładnie odpowiadają elementom całkowicie nieprzezroczystym w drugim, i vice versa. Zasada Babineta daje prostą metodę wyznaczania obrazu dyfrakcyjnego jednego z tych przedmiotów gdy znany jest obraz dyfrakcyjny drugiego z nich. Niech $E_1(P)$ i $E_2(P)$ oznaczają amplitudy zaburzeń w punkcie P pochodzące od dwóch komplementarnych obiektów. Jeśli $E(P)$ oznacza amplitudę w punkcie P w przypadku braku przedmiotu, to z uwagi na fakt że obraz dyfrakcyjny wyznacza się przez całkowanie po obszarze elementów przezroczystych i że suma tych elementów w dwóch przedmiotach daje całą płaszczyznę, otrzymujemy

$$E(P) = E_1(P) + E_2(P). \quad (17)$$

Związek powyższy nazywany jest zasadą Babineta obowiązującą zarówno dla dyfrakcji Fresnela jak i dyfrakcji Fraunhofera. Jako przykład wyznaczmy intensywność na osi w polu Fresnela dla krążka.

Zgodnie ze wzorem (6) amplituda w punkcie leżącym na osi optycznej wynosi (dla otworka)

$$E_1(P) = E_0(P)[1 - \exp(-i\pi)], \quad (18)$$

gdzie E_0 oznacza amplitudę pola w punkcie P przy braku jakiegokolwiek przedmiotu. Oznaczając przez $E_2(P)$ amplitudę w punkcie P pochodzącą od nieprzezroczystego krążka o tej samej średnicy, z zasady Babineta mamy

$$E_2(P) = E_0(P) - E_1(P) = E_0(P) \exp[(-i\pi)]. \quad (19) \quad \text{Intensywność wynosi więc } I_2(P) = |E_2(P)|^2 = I_0(P). \quad (20)$$

Widzimy, że intensywność na osi w polu Fresnela krążka jest równa intensywności w przypadku braku krążka. Rezultat ten jest słuszny dla małej średnicy krążka, tzn. gdy zmiany $(r_1 + r_2)$ są pomijalnie małe w obszarze krążka.

3. Zjawisko samoobrazowania (efekt Talbota)

Przy oświetleniu przedmiotu okresowego wiązką przestrzennie koherentną o bezaberracyjnym czole falowym otrzymuje się wzdłuż kierunku oświetlenia, w płaszczyznach do niego prostopadłych, obrazy tego przedmiotu. Proces obrazowania nie wymaga stosowania żadnych dodatkowych optycznych układów obrazujących, realizowany jest wyłącznie na drodze interferencji wiązek ugiętych na przedmiocie.

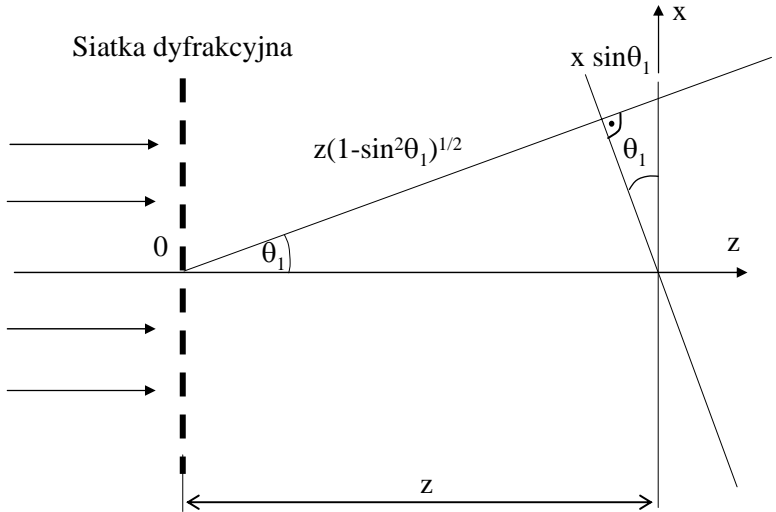
Dla uproszczenia rozważań przyjmijmy jako przedmiot jednowymiarową strukturę okresową (np. siatkę dyfrakcyjną) o okresie przestrzennym d w kierunku osi x , oświetloną falą płaską wzdłuż normalnej do płaszczyzny przedmiotu. Amplitudową transmitancję tego przedmiotu można przedstawić za pomocą szeregu Fouriera

$$t(x,y,0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left[i n 2\pi \frac{x}{d} \right], \tag{21}$$

gdzie a_n oznacza współczynniki Fouriera n -tych harmonicznych. Powyższą transmitancję można interpretować wykorzystując podejście kątownego widma fal płaskich. Falę padającą i przedmiot okresowy zastępuje się zbiorem wiązek o płaskich czołach falowych i amplitudach a_n . Kierunki propagacji tych fal tworzą kąty θ_n względem normalnej do siatki (patrz poprzednie części wykładu) spełniające równanie

$$\sin \theta = n\lambda/d. \tag{22}$$

Wyznaczenie amplitudy zespolonej w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny xy zawierającej przedmiot, w odległości z od niej, wymaga zsumowania amplitud poszczególnych wiązek (harmonicznych). Na rysunku 8 przedstawiono sposób wyznaczania drogi optycznej dla pierwszego rzędu ugięcia wzdłuż normalnej do czoła falowego, od płaszczyzny przedmiotu - siatki dyfrakcyjnej - do punktu x w płaszczyźnie obserwacji.



Rys. 8. Sposób wyznaczania drogi optycznej czoła falowego +1go rzędu ugięcia od siatki dyfrakcyjnej do płaszczyzny obserwacji leżącej w odległości z od siatki.

$$l(x, z) = z(1 - \sin^2 \theta_1)^{1/2} + x \sin \theta_1. \quad (23)$$

Drogę tę wyraża wzór

Amplituda zespolona n-tego rzędu ugięcia jest równa

$$a_n(z) = a_n \exp\left\{i \frac{2\pi}{\lambda} l(x, z)\right\} = a_n \exp\left\{i 2\pi \left(n \frac{x}{d} + \frac{z}{\lambda} - \frac{n^2 \lambda z}{2d^2} \right)\right\}, \quad (24)$$

Przyjęto przybliżenie $(1 - \sin^2 \theta_n)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta_n$, które wynika z dopuszczenia małych wartości kątów ugięcia $\theta_{\pm n}$ i odpowiada dyfrakcyjnemu przybliżeniu Fresnela (patrz poprzednia część wykładu). Całkowita amplituda zespolona w odległości z wynosi

$$U(x, y) = \exp\left\{i \frac{2\pi}{\lambda} z\right\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left\{i 2\pi \left(n \frac{x}{\lambda} - \frac{n^2 \lambda z}{2d^2} \right)\right\} \quad (25)$$

Człon $\exp(i2\pi z/\lambda)$ występujący przed znakiem sumy znika w przypadku detekcji rozkładu intensywności. W porównaniu z wartością a_n w płaszczyźnie siatki, amplituda n-tej harmonicznnej pola dyfrakcyjnego w odległości z przyjmuje teraz wartość $a_n \exp(-i\pi n^2 \lambda z/d^2)$. W ten sposób zastosowanie podejścia widma kąтового fal płaskich (przedstawienie transmitancji przedmiotu jako sumy harmonicznnych) umożliwia szybkie wyznaczenie rozkładu amplitudy zespolonej w polu dyfrakcyjnym Fresnela.

Z powyższych wzorów wynika, że z odległością propagacji z zmienia się różnica faz między interferującymi rzędami ugięcia. W przypadku, gdy odległość z jest równa parzystej wielokrotności d^2/λ , pole dyfrakcyjne stanowi replikę rozkładu amplitudy zespolonej w płaszczyźnie siatki, gdyż różnica fazy między rzędami dyfrakcyjnymi odpowiada różnicy faz w płaszczyźnie przedmiotu. Gdy odległość z jest równa nieparzystej wielokrotności d^2/λ możemy również mówić o replice rozkładu amplitudy zespolonej z płaszczyzny siatki, ale przesuniętej poprzecznie o pół okresu w kierunku osi x (nieparzyste harmoniczne doznają przesunięcia fazowego π).

Właściwość generowania repliki amplitudy zespolonej z płaszczyzny przedmiotu przy założeniu nieograniczonych wymiarów poprzecznych przedmiotu (!) nosi nazwę zjawiska samoobrazowania lub efektu Talbota. Jest to charakterystyczna cecha dla przedmiotów o okresowej transmitancji amplitudowo-fazowej, aczkolwiek klasa tego typu przedmiotów jest szersza. Dalsza analiza tego zagadnienia wykracza poza zakres niniejszego wykładu.

W zaprezentowanej analizie udowodniono występowanie zjawiska samoobrazowania (przy założeniu pełnej koherencji czasowej i przestrzennej promieniowania oraz nieskończonych wymiarów poprzecznych przedmiotu) wykazując powtarzanie się rozkładu amplitudy zespolonej z płaszczyzny przedmiotu. Główne parametry pola dyfrakcyjnego, tzn. lokalizację płaszczyzn samoobrazów i powiększenie poprzeczne w tych płaszczyznach, można jednakże wyznaczyć posługując się tylko trzema najniższymi harmonicznymi transmitancji amplitudowo-fazowej przedmiotu ($n = +1, 0$ i -1).

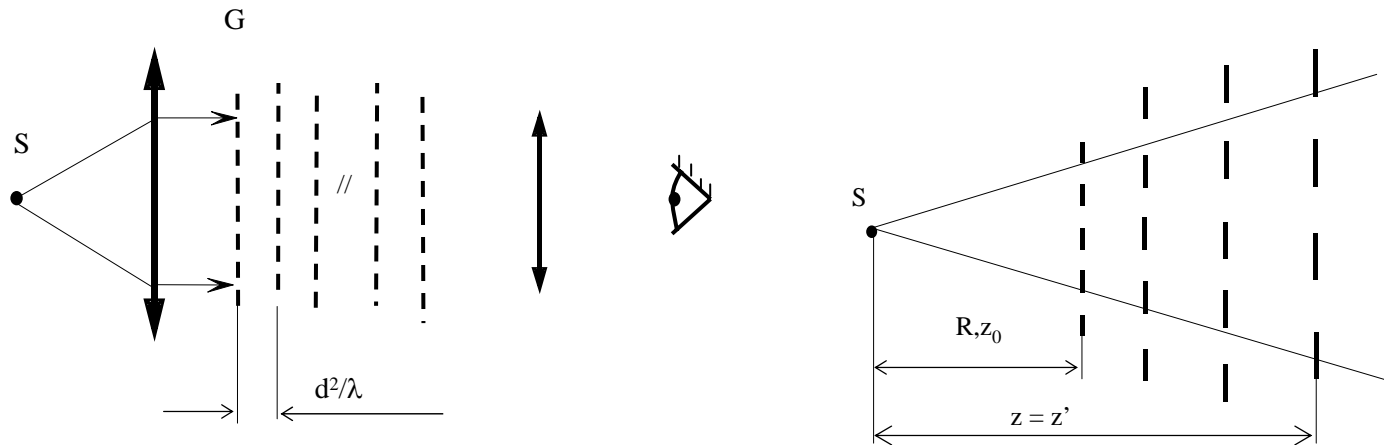
Dla przedmiotu okresowego o sinusoidalnej transmitancji amplitudowej $t_s(x,y)$ z wzoru (21) mamy

$$t_s(x,y) = a_0 + a_1 \exp(i2\pi x/d) + a_{-1} \exp(-i2\pi x/d). \quad (26)$$

Wyznamy rozkład intensywności w odległości z . Uwzględniając we wzorze (25) tylko wyrazy $n = 0, +1$ i -1 , i oznaczając amplitudę zespoloną w tym przypadku jako $U_s(x,y,z)$ rozkład intensywności dany jest wzorem

$$I(x,y,z) = |U_s(x,y,z)|^2 = a_0^2 + 2a_1^2 + 4a_0 a_1 \cos(\pi\lambda z/d^2) \cos(2\pi x/d) + 2a_{-1}^2 \cos(4\pi x/d). \quad (27)$$

Powiększenie poprzeczne samoobrazów w omawianym przypadku oświetlenia wiązką o płaskim czole falowym jest równe jedności, rys. 9a.



Rys. 9 Schematyczne przedstawienie zjawiska samoobrazowania na przykładzie binarnej amplitudowej siatki dyfrakcyjnej G oświetlonej falą o płaskim (a) i sferycznym (b) czole falowym.

Rozważmy teraz przypadek oświetlenia przedmiotu wiązką o sferycznym czole falowym, rys. 9b. Dla prostoty obliczeń rozważmy ponownie przypadek sinusoidalnej transmitancji przedmiotu okresowego, wzór (26). Poosiowe odległości punkтового źródła światła S_0 , przedmiotu G i płaszczyzny obserwacji OP oraz położenia wtórnych źródeł dla rzędów ugięcia +1 (S_{+1}) i -1 (S_{-1}) pokazano na rys. 10. Amplituda w płaszczyźnie obserwacji jest równa sumie amplitud trzech wiązek o quasi-sferycznych czołach falowych propagujących się ze źródeł S_0 , S_{+1} i S_{-1} . Amplitudy tych wiązek opisują wzory

$$U_0(x, y, z) = A_0 \exp\left\{i \frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{x^2 + y^2}{2z} \right]\right\}, \quad (28)$$

$$U_{+1}(x, y, z) = A_1 \exp\left\{i \frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{(x - \Delta)^2 + y^2}{2z} - \delta x \right]\right\}, \quad (29)$$

$$U_{-1}(x, y, z) = A_1 \exp\left\{i \frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{(x + \Delta)^2 + y^2}{2z} - \delta x \right]\right\}, \quad (30)$$

gdzie odległość $|\Delta|$ źródeł S_{+1} i S_{-1} od osi optycznej wynosi

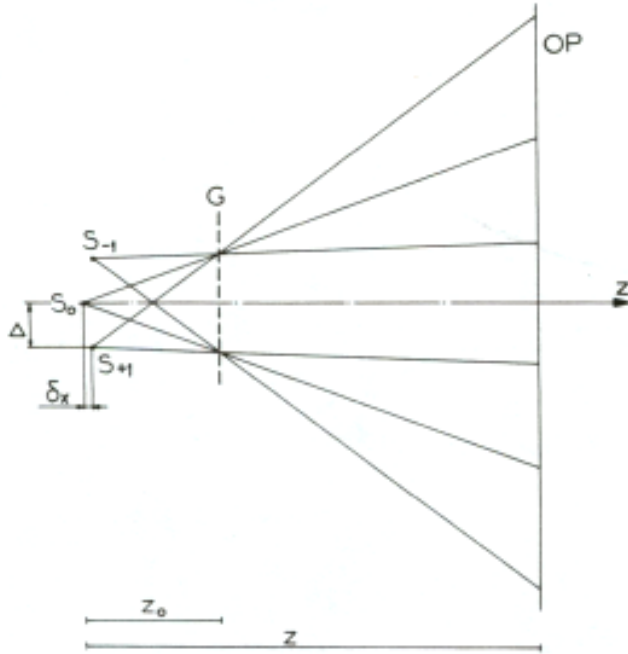
$$|\Delta| = z_0 \sin|\theta| = z_0 (\lambda/d) \quad (31)$$

$|\theta|$ oznacza kąt propagacji pierwszych rzędów ugięcia względem osi optycznej, λ - długość fali promieniowania. Poosiowe przesunięcie S_{+1} i S_{-1} względem S_0 jest równe

$$\delta x = |z_0 (1 - \cos\theta)| \quad (32)$$

Rozkład intensywności dany jest wzorem

$$I(x, y, z) = |U_0(x, y, z) + U_{+1}(x, y, z) + U_{-1}(x, y, z)|^2 = a_0^2 + a_1^2 + 4a_0 a_1 \cos\left\{\frac{\pi\lambda}{d^2} \frac{(z - z_0)z_0}{z}\right\} \cos\frac{2\pi}{d(z/z_0)} x + 2a_1^2 \cos\left\{\frac{2\pi}{d(z/z_0)} 2x\right\} \quad (33)$$



Rys. 10 Schematyczne przedstawienie trzech rzędów ugięcia siatki dyfrakcyjnej o sinusoidalnej transmitancji amplitudowej oświetlonej przez źródło punktowe S_0 . Poosiowe i poprzeczne odległości źródeł wtórnych pierwszych rzędów ugięcia względem rzędu zerowego oznaczono, odpowiednio, jako δx i Δ .

Powiększenie poprzeczne dyfrakcyjnych obrazów siatki jest równe (z/z_0) . Jest to iloraz odległości płaszczyzny obserwacji od źródła punktowego do odległości płaszczyzny przedmiotu od tegoż źródła punktowego S_0 . Osiowe położenie samoobrazów z wyznacza się z zależności

$$2\nu \frac{d^2}{\lambda} = \frac{z_0(z-z_0)}{z} \quad (34)$$

gdzie ν oznacza liczbę całkowitą, a więc

$$z = \frac{\lambda z_0^2}{\lambda z_0 - 2\nu d^2} \quad (35)$$

Podsumowując, w rozważanym przypadku oświetlenia falą sferyczną położenie samoobrazów jest funkcją promienia krzywizny $R = z_0$ czoła fali w płaszczyźnie przedmiotu, rys. 9b. Obrazy nie leżą w równych odległościach od siebie, a ich powiększenie poprzeczne zależy od $R = z_0$ i odległości z rozpatrywanego obrazu od przedmiotu.

Jeżeli mierzylibyśmy odległość przedmiotu i płaszczyzny obserwacji od płaszczyzny zawierającej źródło światła S_0 (odległości $R = z_0$ i $z = z'$ na rys. 9b), to płaszczyzny samoobrazów spełniałyby równanie

$$\frac{2\nu d^2}{z_0^2 \lambda} = \frac{1}{z_0} - \frac{1}{z'} \quad (36)$$

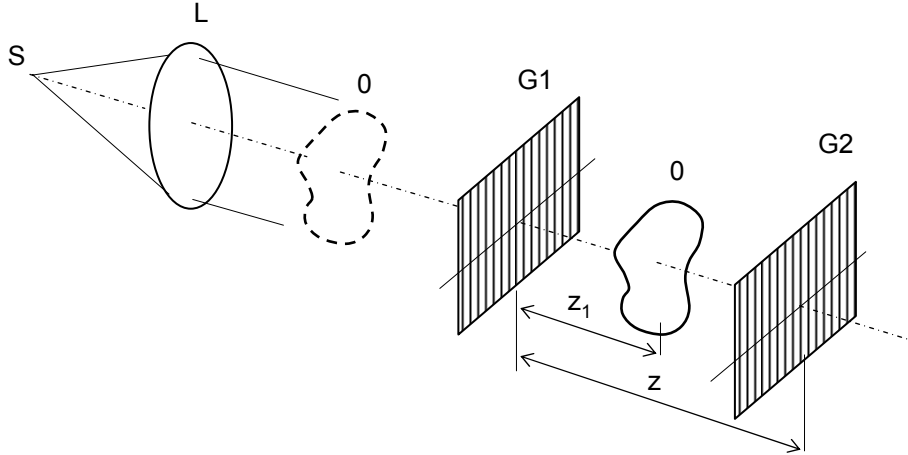
Równanie to można interpretować jako równanie obrazowania przez soczewkę umieszczoną w płaszczyźnie punktowego źródła światła. Powiększenie soczewki jest równe z'/z_0 .

Należy zwrócić uwagę, że ν może przyjmować dodatnie i ujemne wartości. Odpowiadają one, odpowiednio, rzeczywistym ($z > 0$) i pozornym ($z < 0$) samoobrazom przedmiotu. Dodatkowo, przedmiot może być umieszczony na prawo lub na lewo od płaszczyzny zawierającej źródło punktowe – tzn. przedmiot jest wtedy oświetlony zbieżną lub rozbieżną wiązką o sferycznym czole falowym.

Położenie i powiększenie samoobrazów można obserwować za pomocą prostego układu optycznego w postaci lupy lub mikroskopu, lub też z wykorzystaniem efektu mory umieszczając drugą siatkę dyfrakcyjną w polu dyfrakcyjnym Fresnela. Ten drugi sposób zostanie przedstawiony niżej.

Interferometr Talbota

Na rys. 11 przedstawiono schematycznie układ optyczny interferometru Talbota wykorzystującego zjawisko samoobrazowania prostych binarnych amplitudowych siatek dyfrakcyjnych.



Rys. 11 Schemat układu optycznego interferometru Talbota. Badany przedmiot fazowy może być umieszczony przed pierwszą siatką dyfrakcyjną G1 lub między siatkami G1 i G2.

Samoobrazy tworzone w polu dyfrakcyjnym Fresnela siatki G1 (oświetlenie falą płaską) detekowane są za pomocą drugiej siatki G2. W przypadku równych okresów siatek oraz równoległego ustawienia ich linii względem siebie otrzymuje się jednorodny rozkład intensywności prążków mory. Przez skrócenie linii siatek względem siebie lub zastosowanie siatki G2 o okresie różnym od okresu siatki G1 wprowadza się prostoliniowe prążki mory.

Gdy między siatki G1 i G2 zostanie wprowadzone zaburzenie fazowe, czoła falowe rzędów ugięcia siatki G1 ulegają deformacji. Niech badany przedmiot fazowy wprowadzający różnicę dróg optycznych $g(x,y)$ będzie umieszczony w odległości z_1 za G1. Rozkład amplitudy zespolonej w płaszczyźnie obserwacji w odległości z od siatki amplitudowej G1 o transmitancji wyrażonej wzorem (26) można zapisać jako (patrz wzór (25))

$$U(x, y, z) = a_0 \exp[ikg(x, y)] + a_1 \exp\left\{ik \left[\frac{\lambda}{d} x + g(x - \Delta x, y, z) - \frac{\lambda^2 z}{2d^2} \right]\right\} + a_{-1} \exp\left\{ik \left[-\frac{\lambda}{d} x + g(x + \Delta x, y, z) - \frac{\lambda^2 z}{2d^2} \right]\right\}, \quad (37)$$

gdzie $k = 2\pi/\lambda$, $|\Delta x| = \lambda(z - z_1)/d$ odpowiada poprzecznemu przesunięciu (rozdwojeniu) funkcji przedmiotu niesionej przez rzędy $+1$ i -1 w stosunku do rzędu zerowego. Przy wyprowadzaniu wzoru (37) przyjęto $g(x,y,z) = g(x,y)$. Wyrazy $\exp(-ik\lambda^2 z/2d^2)$ opisują przesunięcie fazowe rzędów ± 1 w stosunku do rzędu zerowego.

Przy założeniu małych wartości Δx pozwalającym zapisać $g(x,y) = g(x - \Delta x, y) + \Delta x \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}$, (38) otrzymuje się następujące wyrażenie opisujące rozkład intensywności w płaszczyźnie obserwacji

$$I(x,y,z) = a_0^2 + 2a_1^2 + 4a_0 a_1 \cos\left(\frac{\pi \lambda z}{d^2}\right) \cos \frac{2\pi}{d} \left[x - \frac{d}{\lambda} \Delta x \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} \right] + 2a_1^2 \cos \frac{4\pi}{d} \left[x - \frac{d}{\lambda} \Delta x \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} \right]. \quad (39)$$

Maksymalny kontrast otrzymuje się w płaszczyznach samoobrazów, tj. $z = vd^2/\lambda$. Odstępstwo prążków od prostoliniowości jest proporcjonalne do pierwszej pochodnej zaburzenia fazowego w kierunku prostopadłym do linii siatki (kierunek rozdzielenia czoła fali). Wartość pochodnej jest uśredniona w przedziale Δx . Można ją wyznaczyć metodą prążków mory wprowadzając siatkę G2 w płaszczyźnie obserwacji i mierząc lokalne zmiany rozkładu intensywności (detekcja w polu jednorodnym) lub odchyłki prążków od prostoliniowości (detekcja w polu prążkowym). Czułość metody można łatwo zmieniać zmieniając wielkość rozdzielenia Δx .

W przypadku większych zmian drogi optycznej $g(x,y)$ wprowadzanej przez badany przedmiot lub większych wartości rozdzielenia Δx przybliżenie wyrażone wzorem (38) nie jest wystarczające i należy uwzględnić kolejny człon rozwinięcia Taylora funkcji $g(x,y)$. W tym przypadku rozkład intensywności opisuje wzór

$$I(x,y,z) = a_0^2 + 2a_1^2 + 4a_0 a_1 \cos \pi \left[\frac{\lambda z}{d^2} - \frac{(\Delta x)^2}{\lambda} \frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x^2} \right] \cos \frac{2\pi}{d} \left[x - \frac{d}{\lambda} \Delta x \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} \right] + 2a_1^2 \cos \frac{4\pi}{d} \left[x - \frac{d}{\lambda} \Delta x \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} \right]. \quad (40)$$

Człon drugiej pochodnej funkcji $g(x,y)$ pojawia się w kosinusie opisującym kontrast rozkładu intensywności w płaszczyźnie obserwacji. Tak więc kształt prążków niesie informację o pierwszej pochodnej, a modulacja kontrastu o drugiej pochodnej badanego zaburzenia fazowego.

Wizualizacja okresowych modulacji fazowych

Procesowi samoobrazowania podlegają przedmioty okresowe, zarówno amplitudowe, fazowe jak i amplitudowo-fazowe. Przedmioty amplitudowe dają bardziej spektakularne efekty (wysoki kontrast rozkładu intensywności samoobrazów) i stąd szersze stosowanie, np. w wyżej opisanym interferometrze Talbota.

Omówimy teraz przypadek dyfrakcyjnego obrazowania sinusoidalnej fazowej siatki dyfrakcyjnej. Transmitancję takiej siatki, oświetlonej przestrzennie koherentną falą płaską, opisuje wzór

$$t(x) = \exp\left\{iB \cos\left(2\pi \frac{x}{d}\right)\right\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(B) \exp\left\{im2\pi \frac{x}{d}\right\}, \quad (41)$$

gdzie B oznacza amplitudę (głębokość) modulacji fazowej, d jest okresem siatki, x jest współrzędną prostopadłą do linii siatki, a $J_m(B)$ oznacza funkcję Bessela m-tego rzędu od argumentu B. Rozkład intensywności w płaszczyźnie siatki jest stały i nie daje informacji o głębokości modulacji fazowej.

Amplitudę zespoloną w odległości z wyznacza się mnożąc każdą częstotliwość przestrzenną przez $\exp\{-im^2\pi\lambda^2 z/d^2\}$, gdzie m oznacza numer harmonicznej (częstotliwości przestrzennej), tzn.

$$U(x, y) = \sum_m i^m J_m(B) \exp\left\{i\left(m2\pi \frac{x}{d} - \pi m^2 \lambda z/d^2\right)\right\}. \quad (42)$$

Rozkład intensywności opisuje wzór

$$I(x, y) = \sum_m \sum_n i^{m-n} J_m(B) J_n(B) \exp\left\{i\left[(m-n)2\pi \frac{x}{d} - (m^2 - n^2)\pi \frac{\lambda z}{d^2}\right]\right\}. \quad (43)$$

Wykorzystując twierdzenie Grafa o dodawaniu funkcji Bessela otrzymuje się

$$I(x, y) = 1 + 2 \sum_{l=1}^{\infty} J_l\left[2B \sin\left(\lambda \frac{\lambda z}{d^2}\right)\right] \cos\left(2\pi \frac{x}{d}\right). \quad (44)$$

W płaszczyznach samoobrazów, $z = 2vd^2/\lambda$ oraz $z = 2(v + 1/2)d^2/\lambda$, gdzie v oznacza liczbę całkowitą, obserwuje się jednorodny rozkład intensywności – tak jak w płaszczyźnie sinusoidalnej siatki fazowej, $z = 0$. Dla małych wartości głębokości modulacji fazowej B największe zmiany intensywności występują w płaszczyznach leżących w odległościach $z = (v + 1/2) d^2/\lambda$. Rozkład intensywności w tych płaszczyznach opisuje wzór

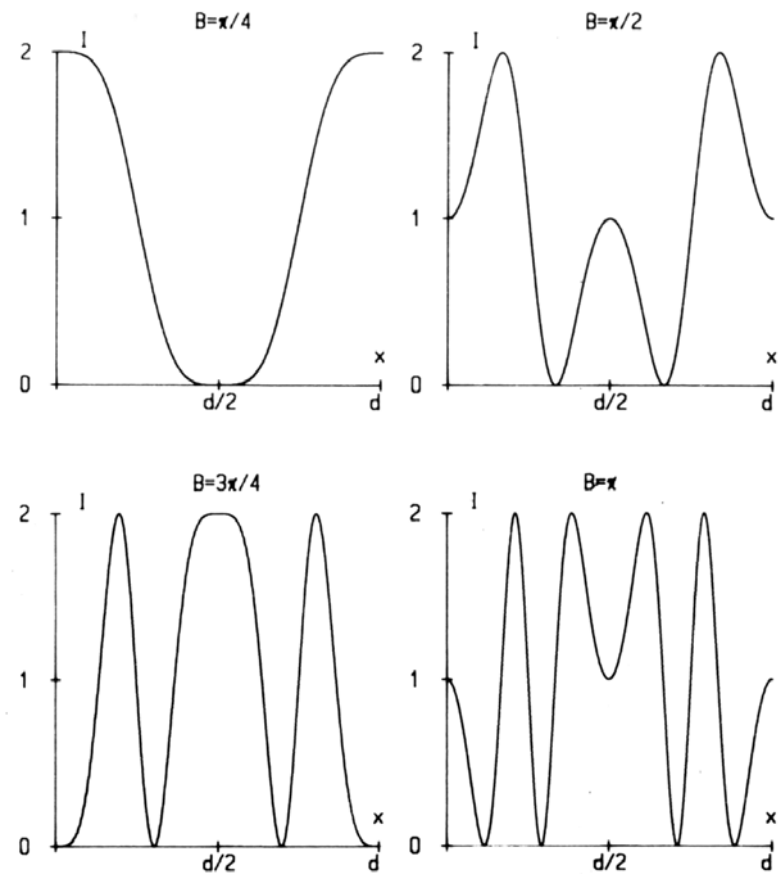
$$I\left(x, z = \left(v + \frac{1}{2}\right) \frac{d^2}{\lambda}\right) = 1 + (-1)^v \sin\left[2B \cos\left(2\pi \frac{x}{d}\right)\right] = 1 + 2(-1)^v \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} J_{2l-1}(2B) \cos\left[(2l-1)\left(2\pi \frac{x}{d}\right)\right] \quad (45)$$

Dla większych wartości parametru B pojęcie kontrastu rozkładu intensywności (stosunek różnicy do sumy maksymalnej i minimalnej wartości intensywności w zakresie pojedynczego okresu przestrzennego) traci sens.

Na rys. 12 przedstawiono wykresy rozkładów intensywności dla czterech wybranych wartości parametru B . Bliższa analiza tych rozkładów pozwala przewidzieć ich charakter (przebieg) dla pośrednich wartości B . Należy zauważyć, że tylko w zakresie $0 < B < \frac{1}{4} \pi$ można jednoznacznie wyznaczyć położenie maksimum ($x = 0$) i minimum ($x = d/2$) rozkładu intensywności. Dla większych wartości B pojawiają się dodatkowe ekstrema, które zmieniają również swoje położenie wzdłuż osi x . Rejestrując krzywe rozkładu intensywności w płaszczyznach maksymalnego kontrastu i porównując je z krzywymi teoretycznymi można wyznaczyć głębokość badanej modulacji fazowej.

Bliższa analiza wzoru (45) pokazuje, że rozkłady intensywności w odległościach $z = (\nu + \frac{1}{2}) \frac{d^2}{\lambda}$ zawierają tylko nieparzyste harmoniczne osiągające w tych właśnie płaszczyznach ekstremalne wartości. Właściwość tę można wykorzystać do pomiaru głębokości modulacji fazowej B wprowadzanej, przykładowo, przez bieżącą falę ultradźwiękową. Mierzona jest amplituda pierwszej harmonicznej rozkładu intensywności przemieszczającego się z prędkością fali ultradźwiękowej względem detektora "punktowego". Po unormowaniu względem poziomu tła można wyznaczyć wartość B z uprzednio wyznaczonej funkcji $2J_1(2B)$.

Metoda ta jest szczególnie przydatna do badania bardzo małych amplitud modulacji fazowej, gdyż amplitudę czasowych harmonicznych rozkładu intensywności opisuje funkcja Bessela o zdwojonym argumentie $2B$.



Rys. 12 Rozkłady intensywności w płaszczyznach maksymalnego kontrastu, $z = (\nu + \frac{1}{2}) \frac{d^2}{\lambda}$, dla różnych wartości głębokości modulacji B sinusoidalnej siatki fazowej (rozkłady w zakresie pojedynczego okresu przestrzennego d).